

軌跡問題

1. $C : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 100$, A 、 B 為圓 C 上兩動點, 且 $\overline{AB} = 16$, 求 $\overline{AB}$ 的中點所成圖形方程式

$$[(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 36]$$

2. $C : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$ 內部一點 $A(2, 0)$, 求通過 A 點所有的弦之中點所成圖形方程式

$$[(x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}]$$

3. 設 $A(0, 0)$ 、 $B(6, 0)$, 試求 $\overline{PA} = 2\overline{PB}$ 的所有點 $P(x, y)$ 所成圖形方程式

$$[x^2 + y^2 - 16x + 48 = 0]$$

4. $C : x^2 + y^2 = 9$ 及圖形外一點 $A(3, 4)$, 當 P 點在圓 C 上連續變動時, 求 $\overline{AP}$ 之中點 M 所成圖形方程式

$$[x^2 + y^2 - 3x - 4y + 4 = 0]$$

圓系、直線系

5. 試求通過圓 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 與直線 $2x - y + 4 = 0$ 的交點, 且切於 x 軸的圓方程式

$$[x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \text{ 或 } x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0]$$

6. (a) $C_1 : x^2 + y^2 - x + 2y - 3 = 0$, $C_2 : x^2 + y^2 - 6x - 4 = 0$, 則 C_1 、 C_2 之交點連線方程式

$$[5x + 2y + 1]$$

- (b) 試求經過 $(2, -1)$ 及兩圓 $x^2 + y^2 - x + 2y = 3$ 與 $x^2 + y^2 - 6x - 4 = 0$ 之交點之圓方程式

$$[9x^2 + 9y^2 + x + 22y - 25 = 0]$$

7. 試求兩圓 $x^2 + y^2 - 23x + 11y = 0$ 與 $x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$ 的公弦為直徑的圓方程式

$$[x^2 + y^2 - 5x - 7y + 18 = 0]$$

8. 過點 $A(1, 2)$ 向圓 $x^2 + y^2 = 2$ 作兩切線, 令切點 P 、 Q , 求:

(a) $\triangle APQ$ 之外接圓方程式_____

(b) O 為圓心, 則四邊形 $PAQO$ 之面積=_____

(c) $\overleftrightarrow{PQ}$ 方程式為_____

$$[(a)x^2 + y^2 - x - 2y = 0 \quad (b)\sqrt{6} \quad (c)x + 2y - 2 = 0]$$

綜合練習

1. 設圓 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 - a^2 = 0 (a > 0)$, 又 $A(5, 0)$ 、 $B(0, 5)$

(a) 若圓 C 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 相交, 則 a 的範圍為 _____

$$[a \geq \sqrt{2}]$$

(b) 若圓 C 與 $\overline{AB}$ 相交, 則 a 的範圍為 _____

$$[\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{5}]$$

2. 從 $A(-3, 3)$ 發出之光線經 x 軸上之鏡面反射後恰與圓 $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ 相切, 求反射後之切線方程式 _____

$$[3x - 4y - 3 = 0 \text{ 及 } 4x - 3y + 3 = 0]$$

3. 過 $(-1, 2)$ 作 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ 之切線, 則此切線段之長度為 _____

$$[4]$$

4. 自 P 向 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$ 作兩切線, 令切點 A 、 B , 若以之 $\overleftrightarrow{AB}$ 之方程式為 $3x - 5y + 9 = 0$, 求 P 之坐標 _____

$$[(1, -2)]$$

5. $C_1: x^2 + y^2 = 25$, $C_2: (x - 4)^2 + (y - 4\sqrt{3})^2 = 1$, 兩圓外公切線夾角為 θ_1 , 兩圓內公切線夾角為 θ_2

(a) (1) 外公切線段長為 $4\sqrt{3}$ (2) $\sin \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) 兩外公切線交點 $P(5, 5\sqrt{3})$

(b) (1) 內公切線段長為 $2\sqrt{7}$ (2) $\sin \theta_2 = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ (3) 兩外公切線交點 $Q(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{3})$